ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

I.

Пример 1. Пусть X – случайная величина числа очков при подбрасывании игральной кости. Это дискретная случайная величина, а ее ряд распределения имеет вид, указанный в таблицей 2.

Таблица 2

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Сложив вероятности, получим

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1.$$

Пример 2. Для случайной величины X - числа бросаний монеты из примера 2.4 §3 при $n=10$, $p=1/2$ таблица распределения такова:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Сложение вероятностей дает

$$\sum_{i=0}^{11} p_i = \frac{1}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{45}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{210}{1024}+$$
$$+\frac{252}{1024}+\frac{210}{1024}+\frac{120}{1024}+\frac{45}{1024}+\frac{10}{1024}+\frac{1}{1024}=1.$$

Если случайная величина имеет счетное количество возможных значений, то ее задают с помощью формульного описания этих значений и их вероятностей. При этом, формульные выражения зависят от i, т.е. номера значения

$$p\{X = x_i(i)\} = p_i(i), \quad i=\overline{1,\infty}.$$

При этом должно выполняться

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

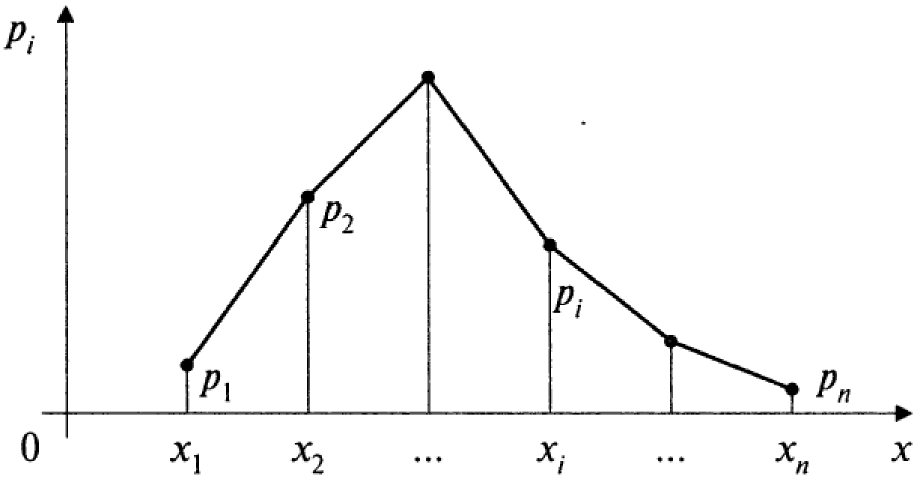

Рис. 1

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат - соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную, называемую *многоугольником* или *полигоном* распределения вероятностей (рис. 1).

Пример 3. В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден. ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Решение

Возможные значения случайной величины X - чистого выигрыша на один билет - равны $0-7=-7$ ден. ед. (если билет не выиграл), $200-7=193$, $250-7=243$, $5000-7=4993$ ден. ед. (если на билет выпал выигрыш соответственно видеомагнитофона, телевизора или автомобиля). Учитывая, что из 1000 билетов число невыигравших составляет 990, а указанных выигрышей соответственно 5, 4 и 1, и используя классическое определение вероятности, получим:

$$p\{X=-7\}=\frac{990}{1000}=0,990; \qquad p\{X=193\}=\frac{5}{1000}=0,005;$$

$$p\{X=243\}=\frac{4}{1000}=0,004; \qquad p\{X=4993\}=\frac{1}{1000}=0,001,$$

т.е. ряд распределения

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

и $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,990+0,005+0,004+0,001=1.$

Пример 4. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам А и Б, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Решение

Возможные значения случайной величины X - числа сданных экзаменов - 0, 1, 2.

Пусть A_i - событие, состоящее в том, что студент сдаст i-й экзамен $(i=1,2)$. Тогда вероятности того, что студент сдаст в сессию 0, 1, 2 экзамена, будут соответственно равны (считаем события A_1 и A_2 независимыми):

$$p\{X=0\}=p\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=p\left(\overline{A_1}\right)p\left(\overline{A_2}\right)=(1-0,7)(1-0,9)=0,3\cdot 0,1=0,03;$$

$$p\{X=1\}=p\left(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2\right)=p(A_1)\,p\left(\overline{A_2}\right)+p\left(\overline{A_1}\right)p(A_2)=$$
$$=0,7\cdot 0,1+0,3\cdot 0,9=0,34;$$

$$p\{X=2\}=p(A_1A_2)=p(A_1)\,p(A_2)=0,7\cdot 0,9=0,63.$$

Итак, ряд распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,03	0,34	0,63

и $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i=0,03+0,34+0,63=1.$

На рис. 2 полученный ряд распределения представлен графически в виде многоугольника (полигона) распределения вероятностей.

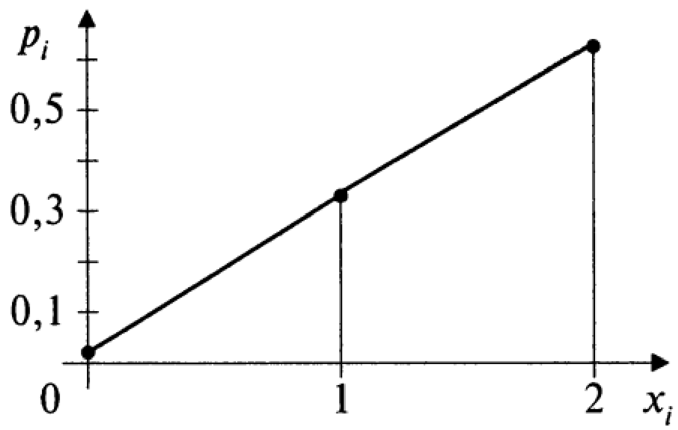

Рис. 2

Упражнения

1. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных.

2. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7.

3. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании.

4. В среднем по 10% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех.

5. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй - 0,8, третьей - 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1.Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела.

7. Произведено два выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым - 0,7, Составить закон распределения числа попаданий в мишень. (Каждый стрелок делает по одному выстрелу).

8. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.

9. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбрано 3. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

10. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Составить закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.

Пример 5. Пусть X - случайная величина числа бросаний монеты до первого выпадения герба. Ясно, что эта случайная величина имеет счетное количество возможных значений, и

$$p\{X=i\}=\frac{1}{2^i},\quad i=\overline{1,\infty}.$$

Ряд распределения:

x_i	1	2	3	…	i	…
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	…	$1/2^i$	…

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой $b_1=\frac{1}{2}$, а знаменатель $q=\frac{1}{2}$. Этот ряд сходится, его сумма $S=\frac{b_1}{1-q}=1$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=1.$$

Следует отметить, что реальных примеров счетных случайных величин не очень много.

Пример 6. Изделия испытывают на прочность при работе в перегрузочных режимах. Вероятность для каждого изделия пройти испытание равна 5/6 и не зависит от исходов испытаний других изделий. Испытания заканчиваются сразу же после того, как появится первое изделие, не выдержавшее проверку на прочность. Найти ряд распределения случайной величины X - числа производимых испытаний.

Решение

Вероятность для каждого изделия пройти испытание равна $p=5/6$; вероятность того, что изделие не пройдет испытание, равна $q=1-p=1/6$. Испытания заканчиваются на k-м изделии (k = 1, 2,3, ...), если первые $k-1$ изделий пройдут испытания, а k-е изделие не выдержит испытания.

Случайная величина X - число проводимых испытаний, ее возможные значения: 1, 2, 3, ... , k, ... (Теоретически число испытаний может быть бесконечно большим). Вероятности возможных значений величины X найдем по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p\{X=k\}=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right), \quad (k=1,2,3,...).$$

Рассматриваемая случайная величина X имеет следующий ряд распределения:

x_i	1	2	3	$\dots$	k	$\dots$
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6^2}$	$\frac{5^2}{6^3}$	$\dots$	$\frac{5^{k-1}}{6^k}$	$\dots$

Особенность рассматриваемой случайной величины X состоит в том, что теоретически последовательность ее возможных значений является неограниченной. Число производимых испытаний может быть бесконечно большим, однако вероятность того, что это произойдет, стремится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} p\{X=k\} = \frac{5^{k-1}}{6^k} = 0.$$

Убедимся в том, что полученная последовательность вероятностей характеризует закон распределения X, т. е. что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3} + \ldots + \frac{5^{k-1}}{6^k} + \ldots = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \frac{5^2}{6^2} + \ldots + \frac{5^{k-1}}{6^{k-1}} + \ldots\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой $b_1 = 1$, а знаменатель $q = \frac{5}{6}$. Этот ряд сходится, его сумма $S = \frac{b_1}{1-q} = 6$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{6} S = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1.$$

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, указывая возможные значения и вероятности, с которыми эти значения появляются в результате испытаний. Для первого из рассмотренных законов распределений (пример 1) все значения равновероятны (пример 1), а для второго (пример 2) значения резко различаются по своим вероятностям: значение 10 имеет вероятность, в 252 раза меньшую, чем значение 5. Это, в частности, означает, что случайная величина принимает значение 5 в 252 раза чаще, чем 10 и т.д.

Упражнения

1. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. д.е. Составить закон распределения случайной величины-размера выигрыша при пяти сделанных покупках.

2. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.

3. Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае

промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела.

4. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 =$ 0,4, $p_2 =$ 0,15. Найти вероятность x_3.

5. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

6. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события A в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

7. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет в пяти веретенах.

8. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Указание: задача сводится к отысканию параметра λ из уравнения $e^{-\lambda} = 5$.

9. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение одной минуты позвонит 3 абонента; позвонит 4 абонента?

10. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно 2 опечатки; в) не менее двух опечаток. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Пример 7. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	0	3	7
p_i	0,3	0,1	0,5	0,1

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить график этой функции.

Решение

1) На промежутке $-\infty < x \le -2$ случайная величина X не принимает ни одного значения, меньшего числа -2, поэтому

$$F(x) = F(-2) = p\{X < -2\} = 0.$$

2) На промежутке $-2 < x \le 0$ величина X принимает одно значение $X = 0$, функция распределения $F(x) = F(0) = p\{X < 0\}$. Вероятность того, что X меньше 0, равна 0,3. На рассматриваемом промежутке

$$F(x) = F(0) = p\{X < 0\} = 0,3.$$

3) На промежутке $0 < x \le 3$ случайная величина X принимает одно значение $X = 3$, функция распределения $F(x) = F(3) = p\{X < 3\}$. При $X < 3$ случайная величина X может принять или значение - 2 с вероятностью 0,3, или же значение 0 с вероятностью 0,1, поэтому, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0,3 + 0,1 = 0,4$. Таким образом,

$$F(x) = F(3) = p\{X < 3\} = p\{X = -2\} + p\{X = 0\} = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

4) На промежутке $3 < x \le 7$ случайная величина X принимает одно значение $X = 7$, функция распределения $F(x) = F(7) = p\{X < 7\}$. При $X < 7$ величина X может принять или значение - 2 с вероятностью 0,3, или значение 0 с вероятностью 0,1, или значение 3 с вероятностью 0,5, поэтому одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0,3 + 0,1 + 0,5 = 0,9$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке

$$F(x) = F(3) = p\{X < 7\} = p\{X = -2\} + p\{X = 3\} + p\{X = 0\} =$$
$$= 0,3 + 0,1 + 0,5 = 0,9.$$

5) На промежутке $7 < x < \infty$ величина X может принять любое из всех своих возможных значений, поэтому функция распределения

$$F(x) = p\{X < \infty\} = 1.$$

Итак, рассматриваемая случайная величина X на всей числовой оси характеризуется следующей функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le -2, \\ 0,3 & \textit{при} \quad -2 < x \le 0, \\ 0,4 & \textit{при} \quad 0 < x \le 3, \\ 0,9 & \textit{при} \quad 3 < x \le 7, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 3.

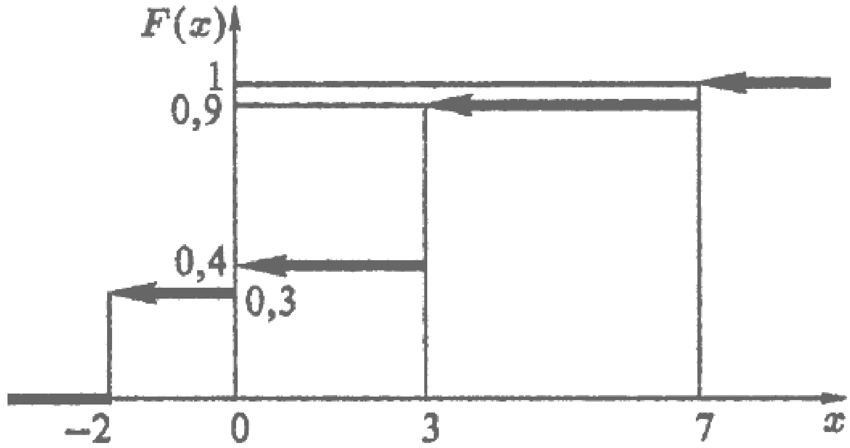

Рис. 3

Заметим, что при подходе слева к точкам разрыва функция сохраняет свое значение (про такую функцию говорят, что она непрерывна слева).

Этот пример позволяет прийти к утверждению, что функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1.

Пример 8. Дискретная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}5 & \text{при } 2<x\le 4,\\ 0{,}7 & \text{при } 4<x\le 8,\\ 1 & \text{при } x>8.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значение не меньшее 4 и меньшее 8.

Решение

Искомую вероятность $p\{4\le X<8\}$ найдем по формуле

$$p\{4\le X<8\}=F(8)-F(4)=0{,}7-0{,}5=0{,}2.$$

Упражнения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить график этой функции.

2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-1	3	6	7	8
p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

Чему равна вероятность $p\{3 < X \le 7\}$.

3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,25	a	b	c	0,15

и вероятность $p\{1 \le X \le 5\} = 0,6$. Тогда чему равны значения a, b и c.

4. Для дискретной случайной величины X,

x_i	2	3	4	5
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \;\; x \le 2, \\ 0,25 & при \;\; 2 < x \le 3, \\ 0,40 & при \;\; 3 < x \le 4, \\ 0,75 & при \;\; 4 < x \le 5, \\ 1 & при \;\; x > 5. \end{cases}$$

Найти значения вероятностей p_1, p_2, p_3 и p_4.

Пример 9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \;\; x \le 2, \\ (x-2)^2 & при \;\; 2 < x \le 3, \\ 1 & при \;\; x > 3. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию плотности распределения $f(x)$;

б) графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) по известной функции $F(x)$ и по найденной функции $f(x)$ вероятность того, что в результате испытания X примет значение, не меньшее 2,1 и меньшее 2,5.

Дать геометрическую интерпретацию величины найденной вероятности $p\{2,1 \le X < 2,5\}$.

Решение

а) Плотность распределения вероятностей $f(x)$ равна производной от функции распределения $F(x)$, поэтому имеем $f(x)=\left(\left(x-2\right)^2\right)'=2\left(x-2\right)$ при при $2{,}1\le x<2{,}5$ и $f(x)=0$ при $x\le 2$ и $x>3$. Таким образом, функция плотности распределения характеризуется выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ x\le 2,\\ 2\left(x-2\right) & при\ \ 2<x\le 3,\\ 0 & при\ x>3.\end{cases}$$

б) Графики функции $F(x)$ и $f(x)$ представлены ниже (рис.5 и 6):

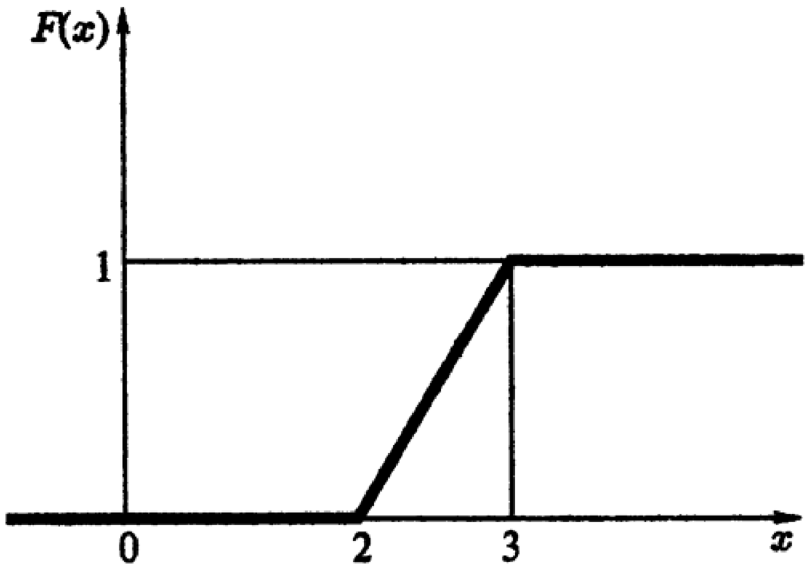

Рис. 5

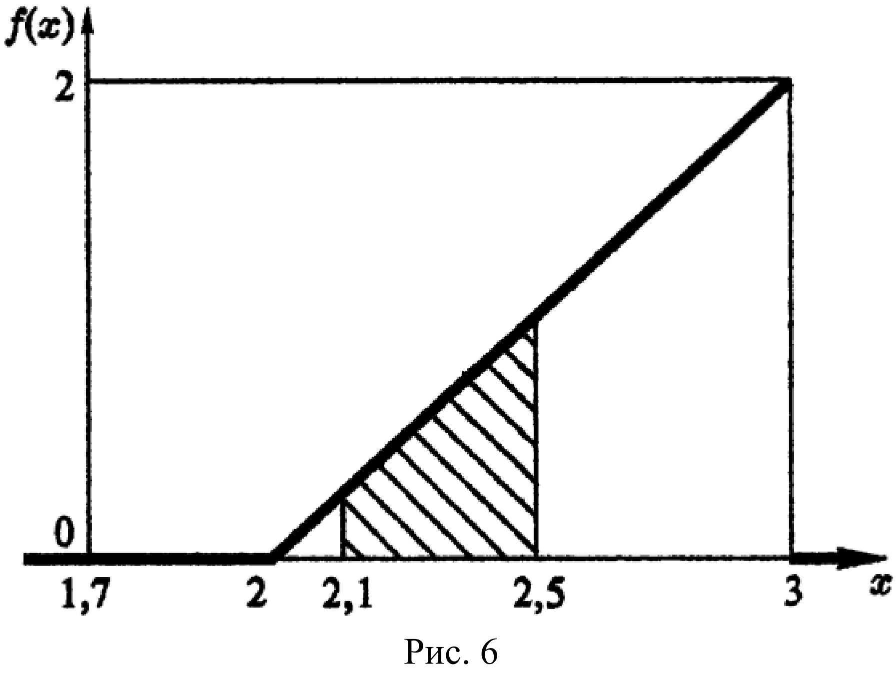

Рис. 6

в) Вероятность попадания случайной величины в интервал [2,1; 2,5) определим как приращение функции распределения в этом интервале:

$$p\{2{,}1 < X < 2{,}5\} = F(2{,}5) - F(2{,}1) = (0{,}5)^2 - (0{,}1)^2 = 0{,}24.$$

Эту же вероятность найдем по известной функции плотности распределения:

$$p\{2{,}1 < X < 2{,}5\} = \int\limits_{2,1}^{2,5} f(x)dx = 2\int\limits_{2,1}^{2,5} (x-2)^2\,dx = (x-2)^2\Big|_{2,1}^{2,5} = 0{,}24.$$

Полученную вероятность $p\{2{,}1 \le X < 2{,}5\}$ можно интерпретировать геометрически как площадь заштрихованной криволинейной трапеции, приведенной на рис. 6.

Пример 10. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2\sin 2x & \text{при } \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение

Если $x \le \dfrac{\pi}{4}$, то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot d\xi = 0.$$

Если $\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}} 0 \cdot d\xi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{x} 2\sin 2\xi\, d\xi = \cos 2\xi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x} = -cos2x.$$

Если $x > \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}} 0 \cdot d\xi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0 \cdot d\xi = 0 - \cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = 1.$$

Таким образом, функция распределения характеризуется выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le\dfrac{\pi}{4},\\ -\cos 2x & при\ \dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & при\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Ниже приведем функции плотности трех важных непрерывных случайных величин.

Упражнения

1. График функции плотности распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид, изображенный на рис. 7.

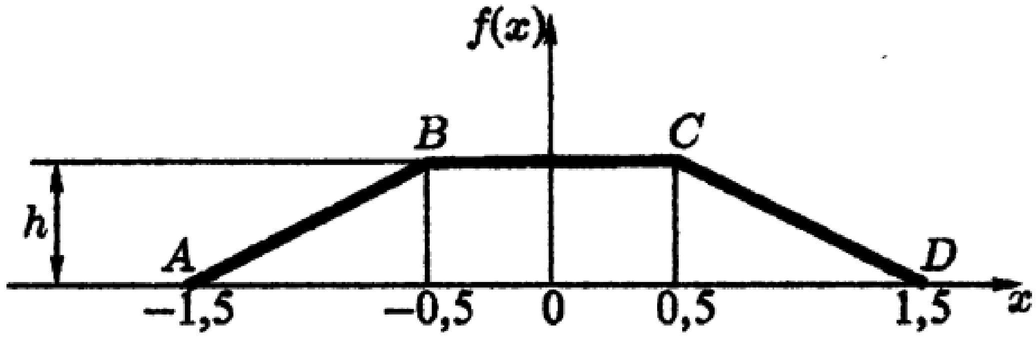

Рис. 7

Найти аналитическое выражение для $f(x)$ на всей числовой оси.

2. Случайная величина X подчинена закону Симпсона (закону равнобедренного треугольника) на отрезке $x\in[-c;c]$ (рис. 8). Найти: а) функция плотности распределения вероятностей этой случайной величины; б) вероятность попадания величины X в интервал $(c/2;c)$.

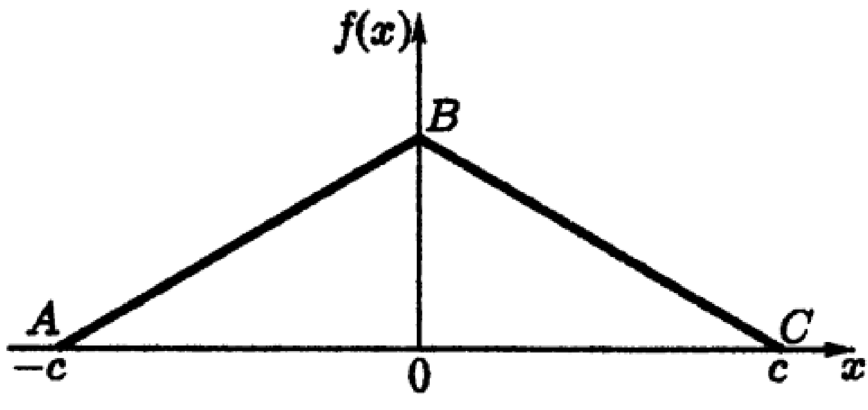

Рис. 8

Пример 11. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.

Решение

Случайная величина X – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0;2] имеет равномерный закон распределения

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x<0, \\ \dfrac{1}{2} & при\ 1\le x\le 2, \\ 0 & при\ \ x>2. \end{cases}$$

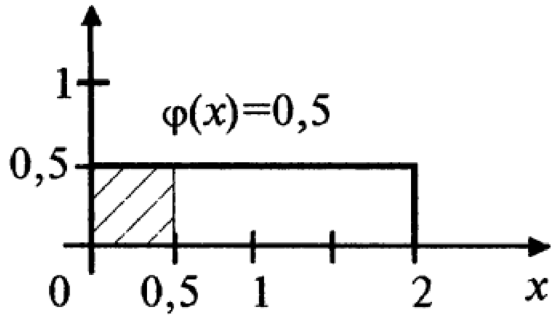

Рис. 11

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты, равна 1/4 от равной единице площади прямоугольника (рис. 11), т.е.

$$p\{X\le 0{,}5\}=\int_0^{0{,}5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0{,}5}=\frac{1}{4}.$$

Пример 12. Случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения вероятностей $f(x)=0{,}5e^{-0{,}5x}$ при $x\ge 0$; при $x<0$ функция $f(x)=0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (2; 4).

Решение

Искомая вероятность того, что X примет значение из интервала (2; 4), равна

$$p\{2<X<4\}=\int_2^4 0{,}5e^{-0{,}5x}dx=-e^{-0{,}5x}\Big|_2^4=e^{-0{,}5\cdot 4}-e^{-0{,}5\cdot 2}=0{,}3678-0{,}1353=0{,}2325.$$

Пример 13. Случайная величина X, все возможные значения которой принадлежат интервалу $(0;\pi/3)$, задана в этом интервале функцией плотности распределения $f(x)=C\sin 3x$. Найти коэффициент C.

Решение

Если функция $f(x)$ представляет собой функцию распределения непрерывной случайной величины X, заданной в интервале $(a;b)$, то выполняется условие: $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$. Неизвестный коэффициент C в выражении функции $f\left(x\right) = C\sin 3x$ определим так, чтобы это условие выполнялось для данной случайной величины X. Для этого найдем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} C \cdot \sin 3x dx = -\frac{C}{3}\left(\cos\pi - \cos 0\right) = -\frac{C}{3}\left(-1-1\right) = \frac{2C}{3}.$$

и приравняем этот результат к единице: $\frac{2C}{3} = 1.$ Из последнего равенства получим $C = \frac{3}{2}$.

Упражнение

Дана функция $y = \frac{A}{x^4}$. Найти значение постоянного множителя A, при котором эта функция могла бы характеризовать плотность распределения вероятностей случайной величины X при условии, что все возможные значения величины X находятся на луче $\left(2; +\infty\right)$.

II.

Пример 1. Пусть X количество очков при бросании игральной кости. Ряд распределения этой величины имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найдем математическое ожидание

$$M\left(X\right) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Пример 2. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна $0{,}515$. Составить закон распределения случайной величины X - числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение

Число мальчиков в семье из $n = 4$ представляет случайную величину X с множеством значений $X = m = 0,1,2,3,4,$ вероятности, которых определяются по формуле Бернулли:

$$p\left\{X = m\right\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p.$$

В нашем случае $n=4$, $p=0,515$, $q=1-p=1-0,515=0,485$.

Вычислим

$$p\{X=0\}=C_4^0 0,515^0\cdot 0,485^4=0,055;$$

$$p\{X=1\}=C_4^1 0,515^1\cdot 0,485^3=0,235;$$

$$p\{X=2\}=C_4^2 0,515^2\cdot 0,485^2=0,375;$$

$$p\{X=3\}=C_4^3 0,515^3\cdot 0,485^1=0,265;$$

$$p\{X=4\}=C_4^4 0,515^4\cdot 0,485^0=0,070.$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

Убеждаемся, что $\sum_{i=1}^{5} p_i = 0,055 + 0,235 + 0,375 + 0,265 + 0,070 = 1$.

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = 0 \cdot 0,055 + 1 \cdot 0,235 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,265 + 4 \cdot 0,070 = 2,06.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины X, имеющей счетное множество значений, равно

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Так как этот ряд может и расходиться, то соответствующая случайная величина может и не иметь математического ожидания. Например, случайная величина X с рядом распределения

x_i	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^i	$\cdots$
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\cdots$	$1/2^i$	$\cdots$

не имеет математического ожидания, ибо сумма ряда равна ∞. На практике, как правило, множество возможных значений случайной величины распространяется лишь на ограниченный участок оси абсцисс и, значит, математическое ожидание существует.

Пример 3. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос равна 0,9. Требуется:

а) составить ряд распределения случайной дискретной величины X - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту;

б) Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение

а) Дискретная случайная величина X - число заданных дополнительных вопросов - имеет следующие возможные значения: $1,2,3,\ldots,k,\ldots$. Найдем вероятности этих возможных значений.

Величина X примет возможное значение 1 (экзаменатор задаст только один вопрос), если студент не ответит на первый вопрос. Вероятность этого возможного значения равна $1-0,9=0,1$. Таким образом,

$$p\{X=1\} = 0,1.$$

Величина X примет возможное значение 2 (экзаменатор задаст только два вопроса), если студент ответит на первый вопрос (вероятность этого события равна 0,9) и не ответит на второй (вероятность этого события равна 0,1). Таким образом,

$$p\{X=2\}=0,9\cdot 0,1=0,09.$$

Аналогично найдем

$$p\{X=3\}=0,9^2\cdot 0,1=0,081; \qquad p\{X=k\}=0,9^{k-1}\cdot 0,1; \ldots.$$

Напишем искомый закон распределения:

x_k	1	2	3	…	k	…
p_k	0,1	0,09	0,081	…	$0,9^{k-1}\cdot 0,1$	…

Проверяем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 0,1+0,1\cdot 0,9+0,1\cdot 0,9^2+\cdots+0,1\cdot 0,9^{k-1}+\cdots=$$

$$=0,1\left(1+0,9+0,9^2+\cdots\right)=0,1\cdot\frac{1}{1-0,9}=\frac{0,1}{0,1}=1.$$

Здесь использовали формулу суммы сходящегося $\left(|q|<1\right)$ геометрического ряда: $S=\dfrac{u}{1-q}$ при $u=1,\ q=0,9.$

Вычислим математическое ожидание

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 1\cdot 0,1+2\cdot 0,09+3\cdot 0,081+\cdots+k\cdot 0,1\cdot 0,9^{k-1}+\cdots=$$

$$=0,1\left(1+2\cdot 0,9+3\cdot 0,9^2+\cdots+k\cdot 0,9^{k-1}+\cdots\right).$$

Для вычисления суммы полученного ряда воспользуемся формулой:

$$S(x)=1+2x+3x^2+\cdots+k\,x^{k-1}+\cdots=\left(x+x^2+\cdots+x^k+\cdots\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

(т.е. сумма данного ряда является производной сходящегося геометрического ряда со знаменателем $|q|=|x|<1$). При $x=0,9$ имеем: $S(0,9)=\dfrac{1}{(1-0,9)^2}=100.$

Тогда $M(X)=0,1\cdot 100=10.$

Упражнения

1. Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить ряд распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

2. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем - уменьшается на 0,1. Необходимо: а) составить ряд распределения числа патронов, израсходованных охотником; б) найти математическое ожидание этой случайной величины.

3. Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить ряд распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

4. Имеются 4 ключа, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток открывания замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

5. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составить ряд распределения числа вызовов, если: а) число вызовов не более 5; б) число вызовов не ограничено. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Пример 4. Функция $f(x)$ задана в виде:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 1, \\ \dfrac{A}{x^4} & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) значение постоянной A, при которой $f(x)$ будет функцией плотности некоторой случайной величины X; б) математическое ожидание случайной величины X.

Решение

а) Для того чтобы $f(x)$ была функцией плотности случайной величины X, она должна быть неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$ или $\frac{A}{x^4} \geq 0$, откуда $A \geq 0$ для нее $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{A}{x^4}dx = 0 + \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{A}{x^4}dx = \frac{A}{3} \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x^3} \bigg|_1^b \right) =$$

$$= \frac{A}{3} \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x^3} \bigg|_1^b \right) = \frac{A}{3} \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b^3} \right) = \frac{A}{3} = 1.$$

откуда $A = 3$.

б) По формуле $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ вычислим математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{1}^{+\infty} x \frac{3}{x^4}dx = 0 + 3 \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^3} =$$

$$= 3 \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \bigg|_1^b \right) = \frac{3}{2} \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b^2} \right) = \frac{3}{2}.$$

Пример 5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \textit{при} \quad 0 < x \leq 2, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение

Сначала найдем функцию плотности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \leq 0, x > 2 \\ \dfrac{x}{2} & \textit{при} \quad 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Теперь по формуле $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ вычислим математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_{0}^{2} x \frac{x}{2}dx = \int_{2}^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{x^3}{6} \bigg|_0^2 + 0 = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}.$$

Упражнения

1. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ Cxe^{-x} & при \quad x\geq 0.\end{cases}$$

При каком значении параметра C эта функция является функцией плотности распределения некоторой непрерывной случайной величины X.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2}$$

Найти: а) коэффициент A; б) математическое ожидание случайной величины X.

3. Случайная величина X распределена по закону Лапласа:

$$f(x)=Ae^{-\lambda|x|}$$

Найти: а) коэффициент A; б) математическое ожидание случайной величины X.

Пример 6. Пусть ряд распределения величины X имеет вид

x_i	-1	5
p_i	0,3	0,7

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение

Найдем

$$M(X)=(-1)\cdot 0,3+5\cdot 0,7=3,2;$$

$$M\left(X^2\right)=(-1)^2\cdot 0,3+5^2\cdot 0,7=17,8.$$

Тогда

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=17,8-(3,2)^2=7,56;$$

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7,56}\approx 2,7495.$$

Пример 7. Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X из примера 4.

Решение

Вначале найдем

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left(\frac{3}{x^4}\right)dx=3.$$

Вычисление интеграла производим аналогично вычислению математического ожидания в примере 4. Теперь учитывая, что $M(X)=\frac{3}{2}$ (см. пример 4) имеем:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right]^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4};$$

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-1	0	3
p_i	0,4	0,4	0,2

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

2. Дисперсия дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения, равна 0,06.

x_i	1	x_2
p_i	0,4	0,6

Найти значение $x_2>0$.

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 0,\\ \dfrac{3x^2}{64} & при\quad 0<x\le 4,\\ 0 & при\quad x>4.\end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{7} & при\quad 0<x\le 7,\\ 1 & при\quad x>7.\end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36} & при \;\; 0<x\le 6,\\ 1 & при \;\; x>6.\end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

Пример 8. Дана случайная величина X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Y=3X$; б) $Z=X^2$.

Решение

а) Значения случайной величины Y будут: $3(-2)=-6$; $3\cdot 1=3$; $3\cdot 2=6$ с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2, т.е.

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Значения случайной величины Z будут: $(-2)^2=4$, $1^2=1$, $2^2=4$ с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Так как значение $Z=4$ может быть получено возведением в квадрат значений (-2) с вероятностью 0,5 и (+2) с вероятностью 0,2, то по теореме сложения $p\{Z=4\}=0,5+0,2=0,7$. Итак, закон распределения случайной величины Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X *и* Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида x_i+y_j $\left(x_i-y_j\right.$ или $\left.x_i\cdot y_j\right)$, где $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y - значение y_j:

$$p_{ij} = p\left[\{X = x_i\}\{Y = y_j\}\right]$$

Если случайные величины X и Y независимы, т.е. независимы любые события $\{X = x_i\}$, $\{Y = y_j\}$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij} = p\{X = x_i\} \cdot p\{Y = y_j\} = p_i \cdot p_j .$$

Замечание. Приведенные выше определения операций над дискретными случайными величинами нуждаются в уточнении, так как в ряде случаев одни и те же значения x_i^m, $x_i \pm y_j$, $x_i y_j$ могут получаться разными способами при различных значениях x_i, y_j, вообще говоря, с различными вероятностями p_i, p_j (см. примеры 8.б и 9).

Пример 9. Даны законы (ряды) распределения двух независимых случайных величин X и Y:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

y_i	-2	0	2
p_i	0,1	0,6	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Z = X - Y$; б) $U = XY$.

Решение

а) Для удобства нахождения всех значений разности $Z = X - Y$ и их вероятностей составим вспомогательную таблицу, в каждой клетке которой поместим в левом углу значения разности $Z = X - Y$, а в правом углу - вероятности этих значений, полученные в результате перемножения вероятностей соответствующих значений случайных величин X и Y.

	y_j	-2	0	2
x_i	p_j p_i	0,1	0,6	0,3
0	0,5	2 0,05	0 0,30	-2 0,15
2	0,2	4 0,02	2 0,12	0 0,06
4	0,3	6 0,03	4 0,18	2 0,09

Например, если $X = 4$ (последняя строка таблицы), а $Y = -2$ (третий столбец таблицы), то случайная величина $Z = X - Y$ принимает значение

$$Z = 4 - (-2) = 6$$

с вероятностью

$$p\{Z = 6\} = p\{X = 4\}\, p\{Y = -2\} = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03.$$

Эти числа $Z = 6$ и $p = 0{,}03$ находятся в клетке на пересечении последней строки и третьего столбца.

Так как среди 9 значений Z имеются повторяющиеся, то соответствующие вероятности их складываем по теореме сложения вероятностей. Например, значение $Z = X - Y = 2$ может быть получено, когда $X = 0$, $Y = -2$ (с вероятностью 0,05); $X = 2$, $Y = 0$ А=2, Г=0 (с вероятностью 0,12); $X = 4$, $Y = 2$ (с вероятностью 0,09), поэтому

$p\{Z = 2\} = 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}09 = 0{,}26$ и т.д.

В результате получим ряд распределения для Z:

z_k	-2	0	2	4	6
p_k	0,15	0,36	0,26	0,20	0,03

Убеждаемся в том, что условие $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$ выполнено.

б) Ряд распределения для $U = XY$ находится аналогично п. а).

u_k	-8	-4	0	4	8
p_k	0,03	0,02	0,80	0,06	0,09

Замечание. Выше ввели понятие независимости случайных величин X и Y, основанное на независимости связанных с ними событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых i и j. Ниже можно дать общее определение независимых непрерывных случайных величин, основанное на независимости событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$. Напомним, что необходимость введения события такого рода мы обсудили в §4.

Пример 10. Пусть в опыте с двукратным бросанием игральной кости величина X есть число очков, выпадающих при первом бросании, а Y - число очков при втором бросании. В этом случае равенство (4) выполняется для любых двух чисел α, β из множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, и, следовательно, величины X и Y независимы.

Пример 11. Определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y имеющие следующие ряды распределения:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Решение

Найдем математические ожидания и средние квадратические отклонения этих случайных величин:

$M(X) = 1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,2 = 1,2; \qquad M(X^2) = 1^2 \cdot 0,8 + 2^2 \cdot 0,2 = 1,6;$

$D(X) = 1,6 - (1,2)^2 = 0,16; \qquad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,16} = 0,4;$

$M(Y) = (-1) \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 = 0,5;$

$M(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,2 = 1,3;$

$D(Y) = 1,3 - (0,5)^2 = 1,05; \qquad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{1,05} = 1,025.$

Для нахождения математического ожидания $M(XY)$ произведения случайных величин X и Y нужно составить закон распределения произведения двух дискретных случайных величин (как это сделано выше при решении примера 9), а затем по нему найти $M(XY)$.

Закон распределения XY имеет вид:

$(x,y)_k$	-2	-1	0	1	2	4
p_k	0,1	0,1	0,3	0,3	0,15	0,05

Тогда имеем:

$M(XY) = (-2) \cdot 0,1 + (-1) \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,05 = 0,5.$

Вычислим ковариацию по формуле (10):

$$k(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = 0,5 - 1,2 \cdot 0,5 = -0,1.$$

Вычислим коэффициент корреляции по формуле (11):

$$r(X,Y) = \frac{k(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{-0,1}{0,4 \cdot 1,025} = -0,244,$$

т.е. между случайными величинами X и Y существует отрицательная линейная зависимость; следовательно, при увеличении (уменьшении) одной из случайных величин другая имеет некоторую тенденцию уменьшаться (увеличиваться).

Пример 12. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины, распределенной по так называемому закону Лапласа с функцией плотности $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Решение

Так как распределение случайной величины X симметрично относительно оси ординат, то все нечетные как начальные, так и центральные моменты равны 0, т.е. $m_1=0, m_3=0,$ $m_3''=0$ и силу $A=\frac{m_3''}{\sigma^3}$ коэффициент асимметрии $A=0$.

Для нахождения эксцесса необходимо вычислить четные начальные моменты m_2 и m_4:

$$m_2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2.$$

Следовательно,

$$D(X)=m_2''=m_2-m_1^2=2-0^2=2 \text{ и } \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2}.$$

$$m_4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}x^4e^{-x}dx=24 \text{ и } m_4''=24.$$

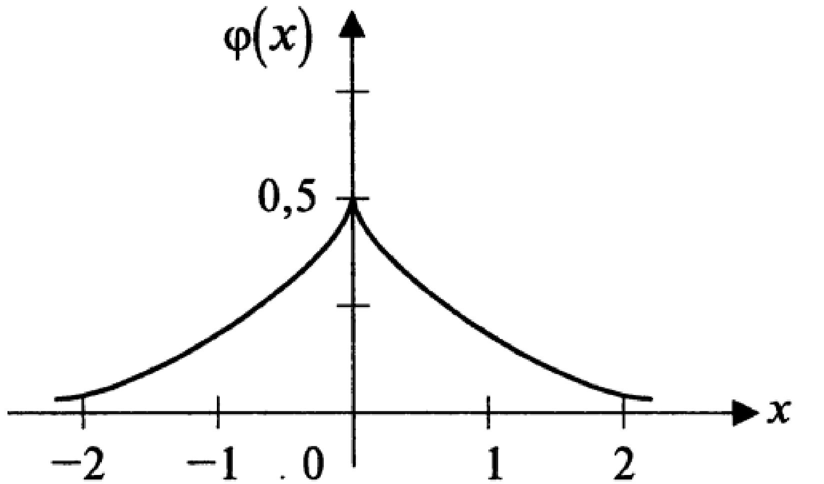

Рис. 3

Теперь вычислим эксцесс

$$E=\frac{m_4''}{\sigma^4}-3=\frac{24}{\left(\sqrt{2}\right)^4}-3=3.$$

Эксцесс распределения положителен, что говорит об островершинности кривой распределения $\varphi(x)$ (рис. 3).